

Departamento de Análisis Matemático

1º de Matemáticas. Examen de Cálculo, septiembre 2001

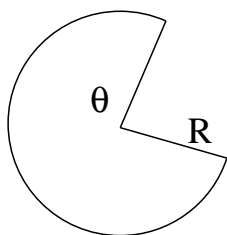
Problema 1. Calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \operatorname{tg} x - 3x}{x^3} \right)^{1/x^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e + e^{1/2} + e^{1/3} + \dots + e^{1/n} - n}{\log n}$

Problema 2. Calcular un número $\lambda > 0$ tal que para todo $x > 0$ se verifique que $\lambda^{x/\lambda} \geq x$. Deducir que si $0 < a < b \leq e$, entonces $a^b < b^a$, y si $e \leq a < b$, entonces $a^b > b^a$.

Problema 3. Se construye un cono circular recto a partir de un sector circular de radio R fijo y ángulo central variable θ (medido en radianes). Calcular para qué valor de θ el volumen del cono obtenido es máximo.



Problema 4. (a) Sea $z = f(x, y)$ donde $x = s^4 + r^4$, $y = 2rs^2$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 2)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 2)$ Sabiendo que $\frac{\partial z}{\partial r}(1, 1) = -2$ y $\frac{\partial z}{\partial s}(1, 1) = 3$.

(b) Encuentre los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $2x + y - 3z = 2$.

Problema 5. Calcular y clasificar los puntos críticos de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente por la igualdad $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

Problema 6. (a) Calcular la integral $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} d(x, y, z)$

donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) Calcular $\iint_D e^{x+y} d(x, y)$, donde D es el cuadrado de vértices $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, es decir, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

Granada, 11 de septiembre de 2001.